ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ ΣΩΜΑΤΙΔΙΑ

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: ΗΛΙΑΣ ΚΥΡΙΤΣΗΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Συνολικοι βαθμοι: 362

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΑΣΚΗΣΗ 1.1:(a) (3 βαθ.) Εκτιμήστε πόσες υπεραγορές έχει η Ελλάδα.

(β) (4 βαθ.) Εκτιμηστε τι ποσοστο του εμβαδου της Ελλαδας καλυπτεται απο ασφαλτοστρωμενους δρομους.

ΑΣΚΗΣΗ 1.2: Δειξτε οτι ενα φωτονιο διανυει το ορατο συμπαν σε ενα χρονο Hubble. (2 βαθ.)

ΑΣΚΗΣΗ 1.3: Δειξτε οτι η μαζα, το μηκος και ο χρονος του Planck εχουν τις καταλληλες διαταξεις. (4 βαθ.)

ΑΣΚΗΣΗ 1.4 : Πόσα πρωτόνια έχει ο ήλιος; Πόσα αστέρια έχει ένας μέσος γαλαξίας;Το συμπαν εχει περιπου 10^9 γαλαξιες. (5 βαθ.)

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ/ΤΑΝΥΣΤΕΣ

ΑΣΚΗΣΗ 2.5: Χρησιμοποιωντας τον ορισμο

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^{\mu}_{\rho} \tag{1}$$

δειξτε οτι η ανταλοιωτη μετρικη μετασχηματιζεται σαν

$$g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} g^{\rho\sigma}$$

(5 βαθ.)

ΑΣΚΗΣΗ 2.6: Δειξτε οτι ο αντισυμμετρικος τανυστης $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$ δεν εξαρταται απο την μετρικη. (5 βαθ.)

ΑΣΚΗΣΗ 2.7 : Δειξτε οτι αν Φ ειναι ενα βαθμωτο πεδιο $\Phi'(x') = \Phi(x)$, τοτε $\partial_\mu \Phi$ ειναι τανυστης. (5 βαθ.)

ΑΣΚΗΣΗ 2.8 : Δειξτε οτι $\nabla_\mu \; g_{\nu\rho} = 0$. Η μετρικη ειναι συναλοιωτα σταθερη. (6 βαθ.)

ΑΣΚΗΣΗ 2.9 : Βρειτε τήν μετρική του χωρόχρονου σε ένα σύστημα αναφοράς που περιστρέφεται στο x-y επίπεδο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω :

$$t' = t \quad , \quad z' = z \quad , \quad x' = x\cos\omega t + y\sin\omega t \quad , \quad y' = -x\sin\omega t + y\cos\omega t$$

(5 βαθ.)

ΑΣΚΗΣΗ 2.10 : Ξεκινώντας απο τόν τριοδιάστατο Ευκλείδιο χώρο, βρειτε την μετρική του σε σφαιρικές συντεταγμένες (r,θ,φ). Δείξτε ότι η μετρική μιάς διοδιάστατης σφαίρας S^2 σε συντεταγμένες (θ,φ) είναι

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta \; d\varphi^2 \tag{2}$$

(6 βαθ.)

ΑΣΚΗΣΗ 2.11 : Γράψτε την μετρική του Schwarschild

$$ds^2 = -\left(1 - 2\frac{M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - 2\frac{M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \; d\Omega^2$$

και Kerr

$$ds^2 = -\left(1 - 2\frac{M}{r}\right) dt^2 + \frac{2M}{r^2}\left(\vec{r} + \frac{1}{r^2}(\vec{j} \times \vec{r})\right) \cdot d\vec{r}dt + \left(\delta_{ij} + \frac{2M}{r^3}x^i x^j\right) dx^i dx^j$$

σε κανονικές (μη γεωμετρικές) μονάδες. (5 βαθ.)

ΑΣΚΗΣΗ 2.12 : Αλλαζοντας ακτινικη συντεταγμενη δειξτε οτι η μετρικη των Robertson-Walker

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \frac{dr^2 + r^2 d\Omega^2}{\left(1 + \frac{k}{4}r^2\right)^2}$$

γράφεται σαν

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2\left(dr^2 + f(r)^2 d\Omega^2\right) \tag{3}$$

$$f(r) = \begin{array}{cc} \frac{1}{\sqrt{k}}\sin\sqrt{k}r & k>0 \\ r & k=0 \\ \frac{1}{\sqrt{|k|}}\sinh\sqrt{|k|}r & k<0 \end{array}$$

Αυτές είναι οι συνκινούμενες συντεταγμένες (comoving coordinates). (6 βαθ.)

ΑΣΚΗΣΗ 2.13 : Θεωρείστε ένα διοδιάστατο χώρο με συντεταγμένες (r,φ) και μετρική που δίνεται απο $ds^2 = dr^2 + g(r)\, d\varphi^2$.

(1) (3 βαθ.) Υπολογείστε τα σύμβολα του Christoffel και δείξτε ότι είναι μηδέν εκτός από

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{2}g'(r) \quad , \quad \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \frac{1}{2}\frac{g'(r)}{g(r)} \tag{4}$$

(2) (5 βαθ.) Υπολογείστε τον τανυστή του Riemman. Πόοες ανεξάρτητες συνιστώσες έχει; Δείξτε ότι

$$R_{r\varphi;r\varphi} = \frac{(g')^2 - 2gg''}{4g} \tag{5}$$

(3) (5 βαθ.) Υπολογείστε τον τανυστή Ricci και την βαθμωτή καμπυλότητα. Δείξτε ότι

$$R_{\mu\nu} = z g_{\mu\nu} \quad , \quad R = 2z \quad , \quad z = \frac{(g')^2 - 2gg''}{4g^2} \tag{6}$$

(4) (3 βαθ.) Βρειτε για ποιες $g(r)$ ο χωρος ειναι επιπεδος?

(5) Οταν $g(r) = \sin^2 r$ τότε η μετρική περιγράφει μιά διοδιάστατη σφαίρα. Δείξτε ότι $R = 2$. Οταν $g(r) = \sinh^2 r$ τότε η μετρική περιγράφει μιά διοδιάστατη ψευδοσφαίρα. Δείξτε ότι $R = -2$. (5 βαθ.)

(6) Ο όγκος ενός γενικού χώρου δίνεται από

$$V = \int \prod_i dx^i \sqrt{|det\ g_{\mu\nu}|} \tag{7}$$

Υπολογείστε τούς όγκους των παραπάνω αν φ είναι μιά γωνία $\varphi \in [0, 2\pi]$. (5 βαθ.)

ΓΕΝΙΚΗ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ

ΑΣΚΗΣΗ 3.14 : Δειξτε οτι $u^\mu u_\mu = -1$. Δειξτε οτι $T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = \rho$. (4 βαθ.)

ΑΣΚΗΣΗ 3.15 : (1) Οριστε την ανταλοιωτη επιταχυνοη

$$a^{\mu} \equiv \frac{du^{\mu}}{d\tau} \tag{8}$$

Δειξτε οτι ειναι παντα καθετη στην ταχυτητα. (3 βαθ.)

(2) Θεωρηστε ενα σωματιο που κινειτε με σταθερη επιταχυνοη g στην διευθυνοη x. Βρειτε την τροχια του στον χωροχρονο υπολογιζοντας $t(\tau), x(\tau)$ σαν συναρτησεις του ιδιου χρονου τ (ο χρονος οπως τον μετραει ο παρατηρητης που κινειτε με το σωματιο. (8 βαθ.)

(3) (2 βαθ.) Δειξτε οτι η ταχυτητα απραμενη παντα μικροτερη της ταχυτητας του φωτος.

(4) Χρησιμοποιηστε τα παραπανω για να υπολογισετε τον χρονο που χρειαζεται ενα διαστημοπλοιο (οπως τον μετρανε τα οργανα του) για να φτασει απο την γη στο κεντρο του γαλαξια μας (αποσταση 30,000 χρονια φωτος) αν κατα την μιση αποσταση επιταχυνεται συνεχως με την επιταχυνοη της βαρυτητας πανω στην γη ($g \simeq 1000 cm/sec^2$) ενω για την υπολοιπη αποσταση επιβραδυνεται με την ιδια κατα μετρο επιβραδυνοη. (7 βαθ.)

ΑΣΚΗΣΗ 3.16 : Θεωρηστε ενα σωματιο που κινειτε σε διοδιαστατο επιπεδο χωρο και χρησιμοποιηστε πολικες συντεταγμενες. Λυστε την γεωδεσιακη εξισωση και βρειτε τις τροχιες που περνανε απο την αρχη των αξονων. (6 βαθ.)

ΑΣΚΗΣΗ 3.17 : Θεωρειστε μια ακτινα φωτος που κινειτε σε διοδιαστατο χωροχρονο με μετρικη

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2$$

(1) Βρειτε την εξισωση της τροχιας στις συντεταγμενες (t,r). (Αυτη ειναι και η τροχια που κανει το φωτονιο αν κινειτε ακτινικα σε τετραοδιαστ ασοη Schwarschild μετρικη.) (5 βαθ.)

(2) Δειξτε οτι χρειαζεται απειρος χρονος στο συστημα (r,t) για να φτασει το φωτο νιο τον "οριζοντα " στο $r = 2M$. Τι σημαινει αυτο? (3 βαθ.)

ΑΣΚΗΣΗ 3.18 : Υπολογιστε ("πειραματικα") την γεωδεσιακη αποκλιση στις γεωδεσιακες ενος κυλινδρου. Τι συμπερανετε για την καμπυλοτητα του; (5 βαθ.)

ΑΣΚΗΣΗ 3.19 : Υποθεστε οτι η υλη αποτελειται μονο απο φως (φωτονια). Τοτε ο τανυστης ενεργειας-ορμης δινεται απο

$$T^{ph}_{\mu\nu} = F_{\mu\rho} F_{\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \tag{9}$$

Δειξτε οτι καθε λυση των βαρυτικων εξισωσεων $G_{\mu\nu} = T^{ph}_{\mu\nu}$ εχει μηδενικη βαθμωτη καμπυλοτητα R. (6 βαθ.)

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ FRIEDMAN/ROBERTSON-WALKER

ΑΣΚΗΣΗ 4.20 : Βάλτε την μετρική Robertson-Walker σε συνκινούμενες συντεταγμένες και τόν τανυστή ορμής-ενέργειας ιδανικού ρευστού στις εξισώσεις της βαρύτητας και δείξτε οτι καταλήγουν στις εξισώσεις του Friedman:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \tag{10}$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \tag{11}$$

Από αυτές δείξτε τήν εξίωση συνεχείας

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) \tag{12}$$

(20 βαθ.)

ΑΣΚΗΣΗ 4.21 : Γραψτε την πυκνοτητα ενος τυπου αραιης υλης ρ_σ σαν

$$\rho_\sigma = e_\sigma \frac{N_\sigma}{V}$$

οπου e_σ ειναι η ενεργεια ανα σωματιδιο, N_σ ειναι ο αριθμος των σωματιδων και V ειναι ο ογκος. Δειξτε οτι

$$\sigma = -\frac{1}{3}\left(\frac{\partial \log e_\sigma}{\partial \log a} + \frac{\partial \log N_\sigma}{\partial \log a}\right)$$

(5 βαθ.)

ΑΣΚΗΣΗ 4.22 : Οταν μια συνιστωσα υλης κυριαρχει την εξελιξη του συμπαντος τοτε μπορουμε να γραψουμε $\rho = A/(t - t_0)^2$. Υπολογιστε το Α για σκονη και ακτινοβολια. (5 βαθ.)

ΑΣΚΗΣΗ 4.23 : Στην αρχη του συμπαντος η υλη ειναι πυκνη. Υποθεστε ενα συμπαν FRW που ειναι γεματο απο πυκνη υλη με εξισωση καταστασης $p = A\,\rho^\gamma$, $A > 0$.

(1) Βρειτε την πυκνοτητα σαν συναρτηση του παραγοντα διαστολης a, της πυκνοτητας καποια χρονικη στιγμη ρ_0 και του παραγοντα αυτη την στιγμη a_0. Θα χρειαστειτε $\int \frac{dx}{x(1+Cx^k)} = \log x - \frac{1}{k}\log(1+Cx^k)$. (4 βαθ.)

(2) Δειξτε οτι μετα απο πολυ χρονο αυτη η υλη συμπεριφερεται σαν σκονη (σ=0). (3 βαθ.)

(3) Υποθεστε οτι γ>1. Δειξτε οτι αυτη η σχεση παυει να ειναι λογικη για

$$a \leq a_0 \left(\frac{A\rho_0^{\gamma-1}}{1 + A\rho_0^{\gamma-1}} \right)^{\frac{1}{3(\gamma-1)}}$$

Τι νομιζετε οτι ειναι το προβλημα? (4 βαθ.)

(4) Κοιταζοντας την ταχυτητα του ηχου μεσα στο διαστελομενο ρευστο δειξτε οτι υπαρχει προβλημα ακομα νωριτερα: για

$$a \leq a_0 \left(\frac{(\gamma+1)A\rho_0^{\gamma-1}}{1 + A\rho_0^{\gamma-1}} \right)^{\frac{1}{3(\gamma-1)}}$$

(5 βαθ.)

(5) Υποθεστε οτι γ < 1 και A < 0. Τι συμβαινει σ'αυτη την περιπτωση? (5 βαθ.)

ΔΟΚΙΜΑΣΙΕΣ ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ

ΣΥΜΒΑΣΕΙΣ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΥ: Η ειναι η σταθερα του Hubble σαν συναρτηση του χρονου και H_0 η σταθερα του Hubble σημερα. Την πυκνοτητα σημερα την συμβολιζουμε με ρ_0 η $\rho_o(0)$. Η κανονικοποιημενη πυκνοτητα σαν συναρτηση του χρονου ειναι $\Omega(z)$ και η τιμη της σημερα Ω. Τελος η σταθερα επιταχυνσης ειναι

$$q_0 = \left. \frac{a\ddot{a}}{(\dot{a})^2} \right|_{t=t_0}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5.24 : (1) Δειξτε οτι οταν η εξελιξη του συμπαντος κυριαρχειται απο μια συνιστωσα υλης, τοτε η ηλικια του συμπαντος δινεται απο τον τυπο

$$t_0 = \frac{2}{3(1+\sigma)} H_0^{-1} f_\sigma(\Omega)$$

οπου $f_\sigma(\Omega) \sim \mathcal{O}(1)$. (4 βαθ.)

(2) Δειξτε οτι η $f_\sigma(\Omega)$ φθινει αργα σαν συναρτηση του Ω. (6 βαθ.)

(3) Δειξτε οτι η υπαρξη προσμειξης σχετικιστικης υλης εχει την ταση να μειωσει την ηλικια του συμπαντος. Αντιθετα, η υπαρξη καμπυλοτητας τεινει να την αυξησει. (5 βαθ.)

ΑΣΚΗΣΗ 5.25 :Βαλτε μη μηδενικη κοσμολογικη σταθερα στις εξισωσεις του Friedman. Δειξτε οτι οι παραμετροι της ΓΣ συνδεονται με τις παρατηρησιμες ποσοτητες σαν

$$\rho_\sigma(0) = \frac{3}{8\pi} H_0^2 \Omega_\sigma \quad , \quad \frac{k}{a_0^2} = H_0^2 \left(\sum_\sigma \frac{3}{2}(1+\sigma)\Omega_\sigma - 1 - q_0 \right)$$

$$\Lambda = 3H_0^2 \left(q_0 - \sum_\sigma \frac{(1+3\sigma)}{2} \Omega_\sigma \right)$$

(5 βαθ.)

ΑΣΚΗΣΗ 5.26 : Δειξτε οτι για συμπαν με οκονη ($\sigma = 0$) και $\Omega = 1$ η σχεση συνκινουμενης αποστασης και ερυθροπιοης z δινεται απο

$$r_c = \frac{2}{a_0 H_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z_c}} \right)$$

(5 βαθ.)

ΑΣΚΗΣΗ 5.27 : Να βρεθει η συνκινουμενη αποσταση σε κενο συμπαν $\Omega = 0$ (συμπαν Milne). (5 βαθ.)

ΑΣΚΗΣΗ 5.28 : Χρησιμοποιηστε την φωτεινοτητα 4×10^{43} erg/sec και την αποσταση 300 Mpc απο την γη για να βρειτε πια ειναι η ροη ενεργειας (σε erg/cm^2/sec) στην γη. (5 βαθ.)

ΑΣΚΗΣΗ 5.29 : Σε τι αποσταση βριισκονται ουρανια αντικειμενα με $z = 1$? Ποσο μετα την Μεγαλη Εκρηξη εκπεμφθηκε το φως τους? (8 βαθ.)

ΑΣΚΗΣΗ 5.30 : (7 βαθ.) Δειξτε οτι οι σχεσεις των διαφορων παρατηρουμενων αποστασεων ως προς την συνκινουμενη αποσταση r_c δινονται απο

$$r_a = \frac{d}{\theta} = a(t_e) r_c \quad , \quad r_m = \frac{v}{\dot{\theta}} = a(t_o) r_c \quad , \quad r_l = \sqrt{\frac{L}{4\pi l}} = \frac{a^2(t_o)}{a(t_e)} r_c$$

οπου t_e, t_o ειναι οι χρονοι εκμπομπης και παρατηρησης αντιστοιχα.

ΑΣΚΗΣΗ 5.31 : Δειξτε για την γωνιακη διαμετρικη αποσταση οτι

$$r_a(z >> 1) \simeq 2|1+3\sigma|^{-1} H_0^{-1} z^{(5+3\sigma-|1+3\sigma|)/4}$$

(7 βαθ.)

ΑΣΚΗΣΗ 5.32 : Αλλαξτε μεταβλητη απο χρονο σε ερυθροπιση z στην εξισωση εστιασης

$$\ddot{l} - \frac{\dot{a}}{a}\dot{l} + 4\pi\alpha\rho l = 0$$

και απο το l στην γωνιακη αποσταση $r_a = l/\theta$ και δειξτε οτι

$$\frac{d^2 r_a}{dz^2} + \frac{(3+q(z))}{(1+z)}\frac{dr_a}{dz} + \frac{3r_a}{2(1+z)^2}\sum_\sigma (1+\sigma)\alpha_\sigma(z)\Omega_\sigma(z) = 0$$

Για $\sigma = 0$, $\Omega = 1$ δειξτε οτι η λυση ειναι

$$r_a(z) = \frac{2}{bH_0}(1+z)^{-(5-b)/4}\left[1-(1+z)^{-b/2}\right]$$

οπου $b = \sqrt{25-24\alpha}$. Ποσο διαφορετικα ειναι οι περιπτωσεις $\alpha = 1$ (ελλειψη οβωλων) και $\alpha = 0$? (10 βαθ.)

ΑΣΚΗΣΗ 5.33 : Απο την στατιστικη φυσικη η πυκνοτητα ενεργειας δινεται απο

$$\rho = \frac{g}{(2\pi)^3}\int d^3p\ E(p)\ f(p)$$

οπου $f(p) = (e^{E/T}+\epsilon)^{-1}$ ειναι η κατανομη Boltzman για μποζωνια (ε=-1) και φερμιονια (ε=1), E(p) ειναι η ενεργεια και g ο αριθμος βαθμων ελευθεριας.

(1) Θεωρηστε υπερχετικιστικα σωματιδια ("ακτινοβολια") $E(p) = |\vec{p}|$ και υπολογιστε την πυκνοτητα για μποζωνια και φερμιονια. Θα χρειαστειτε $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} \equiv \zeta(4) = \pi^4/90$. (5 βαθ.)

(2) Για συλλογες απο υπερχετικιστικα σωματιδια οριζουμε τον "ενεργο" αριθμο βαθμων ελευθεριας απο

$$\rho_{1/3} = \frac{\pi^2}{30} g_*\ T^4$$

Δειξτε οτι

$$g_* = \sum_{\text{μποζωνια}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 + \frac{7}{8}\sum_{\text{φερμιονια}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4$$

(5 βαθ.)

(3) Αν εκτος απο τα φωτονια εχουμε και τα τρια ειδη νετρινων, και η θερμοκρασια τους ειναι $T_\nu = (4/11)^{1/3}T$, βρειτε το g_*. (4 βαθ.)

ΑΣΚΗΣΗ 5.34 : Θεωρειστε ενα συμπαν που περιεχει μη σχετικιστικη υλη $\sigma = 0$, ακτιβολια (σ=1/3) και κοσμολογικη σταθερα Λ. Οι κανονικοποιημενες πυκνοτητες σημερα ειναι Ω_0 και Ω_r για υλη και ακτινοβολια αντιστοιχα.

(1) Γραψτε τον συντελεστη Hubble $H(z)$ σαν συναρτηση της ερυθροπιοης (red shift) z. (3 βαθ.)

(2) Υπολογιστε τον συντελεστη επιταχυνσης $q(z)$ σαν συναρτηση της ερυθροπιοης (3 βαθ.)

(3) Βαλτε την κοσμολογικη σταθερα $\Lambda = 0$. Δειξτε οτι αν $(\Omega_0 + 2\Omega_r)^2 < 4\Omega_r$ τοτε το συμπαν θα διαστελεται για παντα. (4 βαθ.)

(4) Δειξτε οτι η δευτερη εξισωση του Friedman γραφεται σαν την διατηρηση ενεργειας ενος σωματιου με μαζα μ = 2 κινουμενο σε δυναμικο $V(a) = -H_0^2\left(\frac{\Omega_0 a_0^3}{a} + \frac{\Omega_r a_0^4}{a^2}\right)$ με ενεργεια $E = (1 - \Omega_0 - \Omega_r)a_0^2 H_0^2$. Μελετηστε την κινηση για διαφορες τιμες των Ω_0, Ω_r. (5 βαθ.)

(5) Βαλτε τωρα ξανα $\Lambda \neq 0$ και κοιταξτε ξανα το δυναμικο. Τι ειδους κινηση περιμενετε? (4 βαθ.)

ΑΣΚΗΣΗ 5.35 : Βρειτε πως μεγαλωνει ο οριζοντας σαν συναρτηση του χρονου στο αρχικο συμπαν οταν αυτο κυριαρχειτο απο υλη με συντελεστη σ. (5 βαθ.)

ΑΣΚΗΣΗ 5.36 : (1) (2 βαθ.) Εξηγειστε γιατι οταν μια πηγη ηχου περναει απο μπροστα μας ακουμε μια συνεχη αλλαγη της συχνοτητας.

(2) (5 βαθ.) Υποθεστε οτι μια πηγη φωτος κινειτε ακτινικα ως προς τον παρατηρητη με ταχυτητα που πλησιαζει την ταχυτητα του φωτος. Βρειτε την ερυθροπιοη οταν η πηγη πλησιαζει και οταν απομακρυνεται. Αν η πηγη κινειται σε τυχαια κατευθυνση, σε πια γωνια αλλαζει η ερυθροπιοη σε κυανοπιοη?

ΑΣΚΗΣΗ 5.37 : (1) Χρησιμοποιωντας την μετρικη του Robertson-Walker δειξτε την οχεοη $\lambda/a(t) =$ σταθερο για το μηκος κυματος ενος φωτονιου που ταξιδευει στο συμπαν. (4 βαθ.)

(2) Χρησιμοποιωντας την παραπανω οχεοη δειξτε τον τυπο της ερυθροπιοης

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{a_0}{a} - 1$$

(5 βαθ)

(3) Το συμπαν μας διαστελεται. Παρα ταυτα καμποσοι κοντινοι γαλαξιες εχουν μετατοπιοη προς το κυανο. Πως εξηγειται αυτο? (4 βαθ.)

ΑΣΚΗΣΗ 5.38 : (5 βαθ.) Υπολογιστε την ερυθροπιση ενος φωτονιου που εκπεμπεται πολυ κοντα στον οριζοντα μια μαυρης τρυπας και το απορροφαει ενας παρατηρητης που βρισκεται πολυ μακρια απο αυτην. Τι συμβαινει οταν το φωτονιο εκπεμπεται ακριβως πανω στον οριζοντα?

ΑΣΚΗΣΗ 5.39 : (1) Θεωρηστε το συμπαν Friedman-Robertson-Walker γεματο απο ενα πυκνο ρευστο με εξισωση καταστασης $p = C\,\rho^2$. Χρησιμοποιηστε τις εξισωσεις Friedman για να δειξετε οτι για a(t) αρκετα μεγαλο η εξελιξη του συμπαντος ειναι ομοια με αυτην μη σχετικιστικης αραιης υλης ($\sigma = 0$). (5 βαθ.)

(2) Δωστε ενα καλο λογο γιατι το ιδιο θα συμβει με πυκνη υλη που εχει εξισωση καταστασης $p = C\,\rho^\gamma$ με $\gamma > 1$. (5 βαθ.)

ΑΣΚΗΣΗ 5.40 : Υποθεσατε οτι εχουμε μια φωτεινη πηγη στο συμπαν Robertson-Walker με φωτεινοτητα (εκλυομενη ενεργεια ανα μοναδα χρονου) L. Δειξτε (χρησιμοποιωντας το φαινομενο της ερυθροπιοης) οτι η ροη ενεργειας που μετραται στην γη (αποσταση R) ειναι

$$S = \frac{L}{4\pi R^2 (1+z)^2}$$

(6 βαθ.)

ΑΣΚΗΣΗ 5.41 : (α) Δειξτε οτι η λυση της εξισωσης Friedman για ενα συμπαν που περιεχει μη-σχετικιστικη υλη και ακτινοβολια μπορει να γραφτει στην παρακατω παραμετρικη μορφη:

$$\alpha = \sqrt{2y_r}S_k(\eta) - ky_m[C_k(\eta) - 1] \quad , \quad t/a_0 = k\sqrt{2y_r}[1 - C_k(\eta)] - ky_m[S_k(\eta) - \eta]$$

οπου

$$C_k(\eta) = \begin{array}{ll} \cos\eta & \text{if} \quad k = +1 \\ 1 & \text{if} \quad k = 0 \\ \cosh\eta & \text{if} \quad k = -1 \end{array}$$

$$S_k(\eta) = \begin{array}{ll} \sin\eta & \text{if} \quad k = +1 \\ \eta & \text{if} \quad k = 0 \\ \sinh\eta & \text{if} \quad k = -1 \end{array}$$

οπου $y_i = k\Omega_i/2(\Omega - 1)$. (5 βαθ.)

(β) Γραψτε το συζευγμενο συστημα εξισωσεων που ικανοποιουν οι διακυμανσεις της πυκνοτητας υλης και ακτινοβολιας. (5 βαθμ.)

(γ) Δειξτε οτι για αδιαβατικες διακυμανσεις $\delta_r = 4\delta_m/3$. (2 βαθ.)

(δ) Δειξτε οτι η αοταθης (αυξανομενη) λυση για την διακυμανοη ειναι

$$\delta \sim \frac{2y_r[kS_k^2 - 2C_k(1-C_k)] + y_m^2[2k(1-C_k)^2 - 3S_k - k(\eta - S_k)]}{2y_r S_k^2 + y_m^2(1-C_k)^2 + 2\sqrt{2y_r}y_m S_k(1-C_k)} +$$

$$+\frac{2\sqrt{y_r}y_m[S_k(1-C_k) - 3C_k(\eta - S_k)]}{2y_r S_k^2 + y_m^2(1-C_k)^2 + 2\sqrt{2y_r}y_m S_k(1-C_k)}$$

(8 βαθ.)

ΑΣΚΗΣΗ 5.42 : Θεωρειστε μη οχετικιστικη υλη η οποια δεν αλληλεπιδρα με υλη που εχει $w > 0$. Υποθεστε επιοης οτι $\rho_0 << \rho_w$.

(α) (4 βαθ.) Γραψτε την εξισωοη για μικρες διακυμανοεις οτην πυκνοτητα της μη οχετικιστικης υλης.

(β) (4 βαθ.) Χρηοιμοποιωντας οαν μεταβλητη την $y = \rho_0/\rho_w$ δειξτε οτι αυτη γινεται

$$\delta'' + \frac{(6w+1)y + 3w + 1}{6w\ y(y+1)}\delta' - \frac{1}{6w^2\ y(y+1)}\delta = 0$$

(γ) (3 βαθ.) Δειξτε οτι η λυοη που αυξανει δινεται, για $y << 1$, απο

$$\delta \simeq 1 + \frac{y}{w(3w+1)}$$

ενω η αλλη λυοη συμπεριφερεται οαν $\delta \sim y^{(1-3w)/6w}$.

ΑΣΚΗΣΗ 5.43 : Υποθεστε οτι αρχιζουμε με μια πληρως ομογενη κατανομη μαζας και μετα την χωριζουμε οε κομματια (οοο ομογενως μπορουμε). Δειξτε οτι η διατηρηοη της μαζας και ορμης μας δινει οτι $P(k) \sim k^n$ για μικρα k με $n \geq 2$. (6 βαθμοι).

ΑΣΚΗΣΗ 5.44 :Για το ενεργο δυναμικο $V = aT^2|\phi|^2 - b|\phi|^3 + \lambda|\phi|^4$, βρειτε την κριοιμη θερμοκραοια, κατω απο την οποια υπαρχουν δυο ελαχιοτα. Βρειτε επιοης την κριοιμη θερμοκραοια κατω απο την οποια τα δυο ελαχιοτα εχουν το ιδιο βαθος. Ποοο μεγαλο ειναι το χαομα δυναμικου γυρω απο την αρχη των αξονων οαν ουναρτηοη της θερμοκραοιας? (καντε το γραφημα της ουναρτηοης) (5 βαθ.)

ΑΣΚΗΣΗ 5.45 : Δειξτε οτι το δυναμικο

$$V \sim \exp\left[\sqrt{\frac{16\pi}{p\ m_P^2}}\phi\right]$$

δινει πληθωρισμο με παραγοντα κλιμακας που αυξανει σαν $a(t) \sim t^p$. (4 βαθ.)